

W. Dörfler, Klagenfurt

DIDAKTISCHE PRINZIPIEN

0. Einleitung

Um den Gegenstand meines Vortrages klar zu machen, möchte ich exemplarisch erläutern, was ein "didaktisches Prinzip" ist. In Wittmann, "Grundfragen des Mathematikunterrichts" sind zahlreiche solche Prinzipien angeführt. Eines davon ist das "Prinzip der Schüler-Orientierung": "Der Unterricht hat an der vorliegenden kognitiven und affektiven Struktur des Lernenden anzusetzen". Das heißt, im Unterricht sind zu berücksichtigen: der geistig-intellektuelle Entwicklungsstand des Schülers und ganz besonders seine Vorkenntnisse und Erfahrungen, Einstellungen, Ansichten und Neigungen. Es liegt hier also eine Art allgemeiner Anleitung vor, nach der sich der Unterricht (jeglicher Art übrigens!) zu richten hat. Das Prinzip enthält so etwa die Aufforderung an den Lehrer, die kognitive und affektive Struktur des Lernenden zu erkunden und dann seinen Unterricht durch Wahl der Methode, des Stils und auch der geeigneten Inhalte und ihrer Darstellungsform an diese Struktur anzupassen. Diese "Anpassung" ist allerdings die persönliche Leistung des Lehrers und sie wird im allgemeinen recht schwierig sein. Soviel zu diesem Beispiel und zur exemplarischen Begriffsbestimmung von "Didaktisches Prinzip". Nun einige allgemeine Bemerkungen.

Mit diesem Vortrag gehe ich ganz bewußt ein Risiko ein, dem aber meiner Meinung nach auch eine Chance und eine Aufgabe gegenüber stehen. Das Risiko besteht darin, daß ich Ihnen in diesem Vortrag keine konkreten, unmittelbar realisierbaren Vorschläge für Ihren Unterricht anbieten werde und Sie mich nachher vielleicht fragen, wozu das ganze wohl gut sein soll und welchen Vorteil Sie aus dem Besuch dieses Vortrages

ziehen. Ich möchte mich teilweise gleich vorwegnehmend gegen diese Vorwürfe zur Wehr setzen, indem ich Ihnen in kurzen Worten die Rolle erläutere, die für mich die Fachdidaktik hinsichtlich der Gestaltung des Unterrichts spielt. Sicherlich besteht eine Aufgabe der Fachdidaktik darin, Unterrichtsvorschläge zu unterbreiten und zwar sogar zu ein und dem selben Gegenstand mehrere und verschiedene. Für die meisten Gegenstände des Unterrichts an unseren Schulen ist dies im Rahmen der sogenannten Stoffdidaktik auch in manchmal überreichem Ausmaß geschehen. Gewisse dieser didaktischen Unterrichtsvorschläge werden in Schulbüchern realisiert, andere sind nur in der Zeitschriftenliteratur zu finden. Da sich das Schulbuch ja auch nur als methodischer Leitfaden und als ausgearbeiteter Unterrichtsvorschlag versteht und auch nur verstehen kann (Methodenfreiheit), steht der Lehrer jedenfalls in der Situation, eine Wahl treffen zu müssen bzw. noch viel gewichtiger: selbst seinen Unterricht "konstruieren" zu müssen, natürlich unter Verwendung und Berücksichtigung aller ihm zur Verfügung stehenden Hilfsmittel und Daten. Und dies ist eine Aufgabe, die Einfallsreichtum und Kreativität erfordert. Wenn man noch die Komplexität der Unterrichtssituation mitbedenkt, in der der Lehrer tagtäglich steht und die von einer Unzahl von Parametern mitbestimmt wird - wie etwa: soziale und intellektuelle Situation der Schüler, die Klasse, Lehrer - Schüler - Beziehung, Schulsystem, Fachgegenstand - so sieht man ein, daß der Lehrer vor einer schwierigen Aufgabe steht, wenn er versucht, seinen Unterricht in rationaler Planung zu entwerfen. Es wäre nun aber verfehlt, angesichts dieser Schwierigkeiten fertige Rezepte anzubieten. Denn erstens bedeutet dies eine Entmündigung des Lehrers gerade dort, wo seine spezifische Berufskompetenz anzusiedeln ist, die ihn von anderen Berufssparten mit derselben Bezugswissenschaft unterscheidet; zweitens aber berücksichtigt ein solches Vorgehen gerade nicht die Komplexität und Variabilität des Phänomens Unterricht, welche eben nicht den Einsatz fix vorgegebener Vorgangsweisen erlauben. In diesem Sinne sind also alle didaktischen Unterrichtsvorschläge als Anregungen

und Hinweise zu werten, die erst einer konkreten Umsetzung bedürfen. Und hier setzt eine weitere Aufgabe der Didaktik ein: allgemeine Richtlinien - eben "Prinzipien" - zu erarbeiten, nach denen eine derartige Umsetzung erfolgen soll. Es geht also im weitesten Sinne um Konstruktions- und Planungsvorschriften, nach denen, ausgehend von didaktischem Material, der Unterricht geplant, "konstruiert" werden soll. Auch stecken Handlungsanweisungen in solchen Prinzipien.

Woher können nun solche Prinzipien stammen? Eine wesentliche Quelle didaktischer Prinzipien ist die Empirie. Das heißt, durch wissenschaftliche Untersuchung des Unterrichtsgeschehens, des Lehrer- und Schülerverhaltens, der Lehr- und Lernprozesse werden bestimmte Gesetzmäßigkeiten festgestellt, aus denen sich dann eben das eine oder andere didaktische Prinzip ableiten läßt (in solchen Prinzipien spiegeln sich oft Erfahrungen aus der Schulpraxis wider!). Besonders maßgebend für die Entwicklung didaktischer Prinzipien waren lernpsychologische Arbeiten von Piaget (und Mitarbeitern) sowie von Bruner. Neben solchen "wissenschaftlich" begründbaren Prinzipien gibt es auch solche, die aus bestimmten Zielsetzungen des Unterrichts ableitbar sind, also von Konventionen, Normen und Ansichten her bestimmt sind. Wahrscheinlich ist es richtigerweise so, daß beide Komponenten in verschiedener Stärke in jedem der didaktischen Prinzipien auftreten und wirksam werden. In den Prinzipien widerspiegeln sich also Ansichten darüber, was im Unterricht erreicht werden soll, und empirische Ergebnisse darüber, wie das erfolgen kann. Im folgenden sollen einige Prinzipien besprochen und anhand von Beispielen erläutert werden.

1. Das operative Prinzip

Dieses Prinzip stellt allgemein fest, daß darnach zu trachten ist, Begriffe, insbesondere den Begriffsbildungsprozeß, und Verfahren, durch konkrete Handlungen (an realen Objekten bzw. Materialien) vorzubereiten bzw. zu unterstützen. Dabei geht man davon aus, daß viele mathematische Begriffe auf Handlungen, Operationen zurückgehen und aus ihnen durch Abstraktion

gewonnen wurden. Solche Begriffe nennt man auch operative Begriffe, und ist diese Form von Begriffen auch nicht immer in reiner Form anzutreffen, so tragen doch viele Begriffe operative Züge.

Beispiele. Bruchzahlen: hier steckt das Teilen eines Ganzen, einer Einheit drinnen, sowie das Messen.

Menge: das tatsächliche Zusammenfassen zu einem Ganzen wird begrifflich erfaßt.

Geometrische Begriffe: Herstellung der geometrischen Objekte, Konstruktionsanweisungen, technische Herstellungsverfahren.

Abbildung: Zuordnung, die auch tatsächlich vorgenommen werden kann; Drehungen.

Arithmetische Rechenoperationen: entsprechen konkreten Handlungen mit Mengen bzw. Objekten.

Dem Prinzip entsprechend wurden vor allem für den Grundschulunterricht viele didaktische Materialien entwickelt, anhand derer die den mathematischen Begriffen entsprechenden Handlungen durch den Schüler vollzogen werden können. Ich bin aber der Meinung, daß das operative Prinzip auch auf den höheren Schulstufen verwirklicht werden sollte, und zwar so oft wie möglich. Möglichkeiten dafür bieten sich an fast jeder Stelle des Mathematikunterrichts und nur exemplarisch seien erwähnt:

Brüche auf konkrete Materialien (Strecken, Flächen, Massen, Flüssigkeitsvolumina) als Operatoren anwenden.

Funktionsbegriff: konkrete Zuordnungen wahrnehmen lassen; hier ist der Taschenrechner ein wertvolles Hilfsmittel (Umkehraufgaben, Zuordnungstyp erraten lassen aus mehreren Paaren; Bild - Urbild).

Geometrie: Modelle herstellen lassen.

Grenzwert: mit Taschenrechner Folgenglieder ausrechnen, Grenzverhalten untersuchen.

Ableitung: Messen von Geschwindigkeiten tatsächlich ausführen lassen.

Beim Einsatz des operativen Prinzips ist darauf zu achten, daß die von den Schülern auszuführenden Handlungen sich auf verschiedene Objekte beziehen und möglichst vielseitig variiert werden, damit das für die entsprechende Begriffs-

bildung Charakteristische an dieser Operation erkannt werden kann. Im weiteren Unterricht ist bei der Begriffsentwicklung von den Handlungen auszugehen und aus ihnen ist der Begriff zu entwickeln, d.h. die Handlungen dürfen nicht isoliert am Anfang stehen bleiben, sie sollen auch im weiteren den intuitiv-anschaulichen Hintergrund für die mathematischen Begriffe und Operationen bilden.

Es sei noch erwähnt, daß es bei Schülern der Oberstufe vielleicht auch genügen kann, wenn die Handlungen nur vorgestellt werden, ohne sie konkret durchzuführen. Diese Stufe der "verinnerlichten" Handlungen ist jedenfalls anzustreben, auch wenn konkrete Handlungen vorangestellt werden. Ich möchte Sie schließlich noch auffordern, einmal sich selbst zu kontrollieren, wie oft und in welchem Ausmaß Sie mathematische Überlegungen durch geistig vorgestellte Handlungen unterstützen und oft sogar ersetzen. Ich glaube, daß eine solche durch Erfahrung gewonnene Einsicht das operative Prinzip plausibel macht und das Bemühen um seine Verwirklichung unterstützt.

2. Das heuristische Prinzip

Ein erklärtes Ziel des Mathematikunterrichts ist , die Fähigkeit zum Problemlösen zu entwickeln. Dabei soll der Mathematikunterricht nicht nur zum Lösen rein mathematischer Aufgaben befähigen, sondern ganz generell die zum Lösen auch von Alltagsproblemen erforderlichen sogenannten "kognitiven Strategien" entwickeln helfen. Wenn man diesen Anspruch etwas genauer betrachtet und den Mathematikunterricht daran mißt, so kann in vielen Fällen festgestellt werden, daß die Chance zur Erreichung des genannten Zieles sehr klein ist. Die Aufgaben im Mathematikunterricht sind meist der Einübung von Fertigkeiten gewidmet; sind es "Problemaufgaben", so ist die Problemstellung fest umrissen, das Ziel der Aufgabe steht von vornherein fest und auch die anzuwendenden Methoden ergeben sich unmittelbar. Meist ist auch der Lösungsweg eindeutig und ist er es nicht, so werden alternative Lösungen nicht diskutiert. Probleme des täglichen Lebens und in der Wissenschaft sind von genau konträrem Charakter, d.h. ihre Beschreibung enthält gerade die Negationen der obigen Aussagen. Damit

scheint es aber auch klar, daß der Mathematikunterricht, um das (hoch) gesteckte Ziel zu erreichen, in seinen Problemstellungen der Realität näher kommen muß. Einige Anregungen, die unter das "heuristische Prinzip" subsumiert werden können, ergeben sich unmittelbar aus den obigen Bemerkungen: "offene" Probleme stellen, wo also das eigentliche Problem noch nicht deutlich zu sehen ist und nicht eindeutig bestimmt ist, wo es verschiedene Lösungsansätze und auch Lösungen gibt (entsprechend verschiedenen Zwecksetzungen und Interessen, wo außermathematische Bewertungskriterien eingehen, u.ä., wo noch Informationen einzuholen sind); Lösungsverfahren besprechen (wie komme ich dazu, was habe ich verwendet, wie bin ich vorgegangen), Sortier- und Klassifikationsaufgaben geben sowie Aufgaben- und Beispielserien, die zum Vermuten anregen (Strahlensatz, Winkelfunktionen); Entdeckungen machen lassen (entdeckendes Lernen, hier kann wieder der Taschenrechner hilfreich sein); selbst Begriffe in Definitionen formulieren lassen (in anschaulicher Sprache). Wichtig sind dabei zwei Dinge: 1. das heuristische Suchen nach Lösungen muß als solches klar gemacht werden und es soll den Schülern ihr eigenes Verhalten bewußt werden: Nur dann ist die Entwicklung heuristischer Strategien und insbesondere ihr effektiver Einsatz in neuartigen Situationen und Problemstellungen möglich. Das heißt allerdings nicht, daß man heuristische Regeln auswendig lernen lassen kann! 2. Die Atmosphäre im Unterricht und der Unterrichtsstil müssen Fragen, Diskussionen, Reflexionen, Argumente und Gegenargumente gestatten: Schülerideen unterstützen, falsche Lösungsansätze nicht gleich im Keim ersticken, Fehler richtig bewerten und als notwendig im Lösungsprozeß verstehen, die Schüler durch viele anregende Fragen in die Problemlösungen einbeziehen.

Hier ist eine Bemerkung angebracht, um Mißverständnisse zu vermeiden: das heuristische Prinzip bedeutet nicht, daß dem Erwerb von Kenntnissen und Fertigkeiten keine Bedeutung zukommt. Ganz im Gegenteil: um heuristische Strategien zu erlernen, bedarf es bereits fundierter Kenntnisse und Fertigkeiten, und um erworbene Strategien in neuartigen Problemstellungen einzusetzen, sind wiederum die entsprechenden

Kenntnisse und Fertigkeiten eine unumgängliche Voraussetzung. Das heuristische Denken muß zusätzlich geschult werden und zwar an passenden Inhalten und dies über die gesamte Schulzeit. Der Erwerb kognitiver Strategien ist ein langfristiger (wohl niemals abgeschlossener) Prozeß, in dem das richtige (nämlich auch "heuristische") Verhalten des Lehrers sehr wichtig ist. Ein "perfekter" Unterricht in dem Sinne, daß nichts vorher Geplantes, keine Überraschungen passieren können, läuft dem heuristischen Prinzip diametral entgegen. Hier ist sicher der Einwand berechtigt, daß das Schulsystem mit seiner Prüfungsorientiertheit, der Stofffülle und den zahlreichen organisatorischen und disziplinären Problemen einen das heuristische Prinzip berücksichtigenden Mathematikunterricht nicht unterstützt.

3. Prinzip des intermodalen Transfers

Begriffe und allgemeine Wissensinhalte können in grundsätzlich 3 verschiedenen Formen dargestellt werden, wobei nicht jede dieser drei Formen für jeden Inhalt gleich geeignet ist:

- E enaktive Form: Darstellung durch Handlungen
- I ikonische Form: Darstellung durch Bilder
- S symbolische Form: Darstellung durch Zeichen (Sprache)

Beispiele. a) Es ist zu begründen: "Die Diagonalen eines Rechtecks sind gleich lang"

E: Rechteck aus Pappendeckel umdrehen - Diagonalen kommen "aufeinander" zu liegen.

I: In Zeichnung Spiegelung an Halbierender parallel zu einer Seite vornehmen.

S: in analytischer Geometrie.

b) Wurfbahn: Vormachen, Zeichnung, Formel.

c) Menge: konkret, Venn-Diagramm, deskriptive Schreibweise.

d) Zuordnung: Drähte, Pfeildiagramm, Zahlenpaare.

Dabei ist folgendes zu bemerken: Darstellungen desselben Inhalts in den verschiedenen Formen erfassen niemals den gesamten intuitiven Umfang des Inhalts, sondern nur bestimmte Aspekte, sie sind sozusagen Photographien von verschiedenen

Seiten. In diesem Sinne haben die verschiedenen Formen auch ihre Vor- und Nachteile. So ist etwa die symbolische Form aufgrund ihrer Präzision für die Kommunikation besonders geeignet, aber sie unterstützt in der Regel nicht oder nur kalkülmäßig unser Denken. Dies leisten vielmehr Vorstellungen, die eng mit ikonischen und enaktiven Formen zusammenhängen (der Zusammenhang mit den enaktiven Formen ist ja auch eine Begründung des operativen Prinzips). Aus diesen "Modellen" erhalten wir die Ideen, die wir letztendlich in einer symbolischen Form anderen mitteilen. Aus diesen kurzen Überlegungen ergibt sich, daß darnach gestrebt werden soll, Inhalte in den verschiedenen Formen zu repräsentieren. Dabei kann eine Abfolge EIS günstig sein, aber auch gleichzeitige Verwendung aller drei sogenannten Repräsentationsmodi kommt vor. Nun wäre es ein entscheidender Fehler, zwar verschiedene Modi zu verwenden, sie aber unvermittelt und beziehungslos nebeneinander stehen zu lassen. Es muß das "Übersetzen" (der intermodale Transfer) zwischen den Darstellungsformen geübt werden unter Beachtung der schon erwähnten Differenzen zwischen den Formen. Das kann etwa dadurch erreicht werden, daß man zu Bildern sprechen läßt, reale Vorgänge und Situationen graphisch beschreiben läßt, analytische Ausdrücke ikonisch oder enaktiv interpretieren läßt (Monotonie, Steigung, Beschleunigung). Besonders für das Problemlöseverhalten ist es wichtig, Inhalte in den verschiedenen Repräsentationsmodi verfügbar zu haben, wobei es ja auch im selben Modus sehr verschiedene Modelle geben kann und auch Mischformen denkbar sind. Wichtig ist jedenfalls, eine Vielfalt von Darstellungen anzubieten bzw. erarbeiten zu lassen und dann auch bewußt einzusetzen, die Formen zu wechseln und die "Homomorphismen" zwischen ihnen herauszuarbeiten. Es sei noch erwähnt, daß in höheren Schulstufen, sowohl die enaktiven wie ikonischen Darstellungen auch nur in "geistiger" Form vollzogen werden können und nicht tatsächlich ausgeführt werden müssen.

4. Das Spiralprinzip

Wie das Prinzip des intermodalen Transfers geht auch dieses Prinzip auf die Lerntheorie von J.S. Bruner zurück. Das Prinzip baut auf folgenden teilweise auch empirisch belegbaren Voraussetzungen auf:

- a) Man kann mathematische Inhalte in korrekter Form, aber unter Reduktion des Exaktheitsniveaus, der Präzision, des Formalisierungsgrades und der Abstraktion schon sehr früh an Kinder vermitteln. Bruner hat das etwas überspitzt und in oft falsch interpretierter Form so ausgedrückt: "An den Anfang setzen wir die Hypothese: Jedem Kind kann auf jeder Entwicklungsstufe jeder Lehrgegenstand in einer intellektuell ehrlichen Form erfolgreich gelehrt werden".
- b) Es ist günstiger, sowohl für ein vertieftes Verständnis wie auch für das Merkvermögen, einen Stoff nicht erst dann zu behandeln, wenn eine abschließende (gibt es das überhaupt?) Behandlung möglich ist. Demgegenüber sollen vorläufige Darstellungen angestrebt werden, die ohne Verfälschungen nur gewisse Aspekte darstellen und im oben genannten Sinne ein reduziertes Anspruchsniveau besitzen. Etwa kann dies durch Beschränkung auf Einzelfälle und einzelne Objekte und deren Eigenschaften (reduzierte Allgemeinheit) erfolgen. Dies ist auch als "Prinzip des vorwegnehmenden Lernens" (bei Karaschewski) formuliert worden. Ausgehend davon scheint ein "spiraliger" Aufbau des Curriculums sinnvoll: Derselbe Gegenstand wird zu mehreren Zeitpunkten auf verschiedenen Niveaus (im obigen Sinne) behandelt ("Spiralprinzip"). Die Zeitpunkte können dabei in der selben Schulstufe unmittelbar aufeinander folgen oder auch in verschiedenen Schulstufen liegen. Es sind bei einer solchen spiraligen Vorgangsweise allerdings einige Hinweise angebracht: Die einzelnen Durchläufe dürfen nicht isoliert voneinander bleiben, es müssen die Beziehungen, Abhängigkeiten aufgezeigt und bewußt gemacht werden; es muß herausgearbeitet werden, wo und wodurch eine Präzisierung, Verallgemeinerung, Abstraktion u.ä. erfolgt und wozu dies dient, welche neuen Möglichkeiten dabei entstehen, welcher Erkenntnisgewinn dabei entsteht. Ferner darf die Behandlung bei einem früheren Durchlauf die spätere

Erweiterung nicht verstellen, es darf später kein Umdenken, sondern nur ein Weiterdenken erforderlich sein ("Prinzip der Fortsetzbarkeit"). Leider verstoßen so manche didaktische Lösungen gegen dieses Prinzip, weil sie Vereinfachungen vornehmen, die fachsystematisch gesehen eine Sackgasse darstellen und keinen unmittelbaren Ausbau erlauben. Der Schüler muß also zunächst etwas "vergessen", bevor eine Fortsetzung möglich ist. Eine wichtige Ausprägung des Spiralprinzips besteht darin, daß Begriffe und Methoden, die zunächst nur anschaulich-intuitiv auf niedrigem Präzisionsniveau eingeführt werden, bereits auf diesem Niveau zur Anwendung gebracht werden (operationalisiert werden). Dadurch wird das Entstehen eines intuitiven Vorverständnisses und das Wachsen von verinnerlichten Vorstellungen unterstützt, die dann erst die Basis für das Verständnis der exakteren Fassung des Begriffs bzw. der Begründung der Methode ergeben. Die allgemeinen Ausführungen sollen nun an zwei Beispielen erläutert werden.

Brüche und Bruchrechnung

In einem ersten Durchgang (5. Schulstufe) kann, ausgehend von den i.a. vorhandenen Vorkenntnissen und Vorerfahrungen der Schüler, die Wirkung einzelner Brüche als Operatoren auf verschiedene Größen behandelt werden, wobei die enaktive Repräsentation zumindest am Anfang wesentlich zu verwenden sein wird. Auch Addition und Multiplikation (etwa als Aneinanderlegen von Strecken und Nacheinanderausführen von Bruchoperatoren) können hier exemplarisch an einzelnen Objekten vorbereitet werden. Ein zweiter Durchgang (6. Schulstufe) bringt die allgemeine und systematische Erklärung von "Bruch" und seiner Bedeutung sowie der Verknüpfungen. Hier ist noch nicht die Besprechung von Bruchzahlen (rationalen Zahlen) erforderlich, diese kann nach Anwendung und Verwendung des bisher Gelernten erfolgen. Eine nächste Schleife könnte die Einführung der Bruchzahlen und ihr Zusammenfassen zum Körper der rationalen Zahlen sowie die Formalisierung der Rechenregeln sein, wobei auch die Einbettung der natürlichen Zahlen als solche explizit besprochen wird. Die dabei jeweils gemachten Abstraktionsschritte relativ zum Vorhergehenden sollten thematisiert werden. Bis auf diese Stufe

führt in der Regel der Unterricht, aber es ist durchaus auch noch ein weiterer Durchgang möglich, der die Konstruktion der rationalen Zahlen aus den natürlichen bzw. den ganzen Zahlen zum Thema hat. Die Motivation dafür, daß diese Konstruktion gerade so erfolgt, erhält man aus den vorhergehenden Stufen und der dabei einsichtig gewordenen Zweckmäßigkeit der Begriffe und Operationen. Es sei darauf hingewiesen, daß bei einer solchen Vorgangsweise an keiner Stelle etwas für später verbaut wird, aber auch ohne das Gefühl des Vorläufigen zu vermitteln nach jedem "Durchlauf" der Spirale abgebrochen werden kann. Im Grunde steckt in jedem Durchlauf in nuce die vollkommene Allgemeinheit, die sozusagen schrittweise herausgearbeitet und aufgedeckt bzw. präzisiert wird.

Differentialrechnung (Ableitung)

Dieses Beispiel übernehme ich aus einem Vorschlag von R. Fischer. Die Ableitung wird in einer ersten Phase ohne Verwendung eines exakten Grenzwertbegriffes eingeführt usw. ausgehend von Problemstellungen, die diesen Begriff nahelegen. Auf demselben Exaktifizierungsniveau werden auch die wichtigsten Ableitungsregeln und Regeln für das Rechnen mit Ableitungen behandelt (vorläufige Beweise, deren "Lücken" später thematisiert werden). Die zweite Phase stellt die Frage nach einer exakten Bedeutung von "näht sich beliebig", "strebt nach" und kommt so zu einer exakten Grenzwertdefinition, mit der dann der Begriff der Ableitung formal-exakt gefaßt wird und die Beweise exaktifiziert werden. Zu dieser Phase oder getrennt als nächste kann der Ausbau der Theorie gerechnet werden - Untersuchung des Begriffs auf seine Eigenschaften, Konsequenzen, Implikationen und Beziehungen zu anderen Begriffen. Auch diese Sätze können teilweise (Monotonieverhalten) in der ersten Phase in einer qualitativ-intuitiven Form behandelt werden oder man faßt diese beiden Behandlungsphasen erst hier zusammen. Hier bricht die Spirale in der höheren Schule ab, kann aber in natürlicher Weise mit der Differentialrechnung in Banachräumen an der Universität fortgesetzt werden.

S
D
U
I
d
i
P
b
I
d
d
z
a
s
g
e
n
D
I
f
s
B
t
e
H
N
I
I
N
U
F
e
a
H
m
z
B
n

5. Das genetische Prinzip

Das letzte zu besprechende Prinzip ist das allgemeinste und umfassendste und aus ihm lassen sich die anderen quasi herleiten bzw. plausibel machen in dem Sinne, daß sie Anwendungen und Ausformungen des genetischen Prinzips sind. Es ist nicht leicht, in kurzer Form den gesamten Inhalt dieses Prinzips zu umreißen und ich muß mich auf das Wesentliche beschränken. Ein Ausgangspunkt ist die Tatsache, daß menschliches Wissen, wie es sich in Begriffen, Aussagen, Verfahren darstellt, das vorläufige Resultat eines Prozesses ist, und dies sogar in doppelter Hinsicht, nämlich sowohl eines Prozesses, der historisch-menschheitsgeschichtlich abläuft, wie auch eines Prozesses, der in jedem einzelnen Individuum vor sich geht. Etwas differenzierter: Mathematik hat sich ausgehend von Problemen, Zwecksetzungen und Zielsetzungen entwickelt, Mathematik ist eine menschliche Aktivität und nicht nur ein autonomes und statisches Gebäude aus Axiomen, Definitionen, Sätzen und Beweisen, das unveränderbar vorliegt und als solches gelernt werden kann und muß; wichtig für das Verständnis von Mathematik ist der Nachvollzug dieses Prozesses und insbesondere der Genese von mathematischen Begriffen und Methoden. Also: Mathematik soll nicht als fertiges Produkt dem Schüler aufoktroiert werden, wie dies in einer axiomatisch-deduktiven Methode erfolgt, sondern der Mathematikunterricht soll ein gesteuertes Wiederentdecken, Nachvollziehen ermöglichen. Das bedeutet nun keineswegs ein Imitieren des realen historischen Ablaufes mit all seinen Irrtümern und Fehlentwicklungen, also keine "Geschichte der Mathematik", sondern ein Darstellen der grundlegenden Ideen und Konzeptionen und ihrer Entwicklung bis zur heutigen Form, eben der Genese von Mathematik, die ja heute genauso erfolgt und wohl nie zu einem Abschluß gelangen wird. Erst auf einem solchen Wege wird Einsicht in die Bedeutung und Wirksamkeit von Mathematik möglich, ein Erfassen von Mathematik als großartige Konstruktion des menschlichen Geistes zur Lösung von verschiedenartigsten Problemstellungen. Als Beispiele mögen die schon genannten Prinzipien dienen, denen nur noch eines hinzugefügt werden soll: das Prinzip des

mathematisierenden Unterrichts. Kurz kann man es so beschreiben: die Prozesse der Übersetzung einer realen (außermathematischen) Problemsituation in ein mathematisches Modell sollen zum Gegenstand des Unterrichts gemacht werden. Also nicht fertige mathematische Verfahren auf schon vorstrukturierte Situationen "anwenden", wie dies in den meisten "Anwendungsaufgaben" erfolgt, sondern wiederum die Genese des mathematischen Modells ist Gegenstand!

Ein anderer Aspekt des genetischen Prinzips neben dem bisher besprochenen fachlich-inhaltlichen sei noch erwähnt: Die Einbeziehung des Lernprozesses des Schülers in die Überlegungen. Es wird verlangt, auf seine Vorkenntnisse, Erfahrungen aufzubauen, von "seinen" Problemen auszugehen (Betroffenheitsprinzip) und durch die Gestaltung des Unterrichts die Lernprozesse des Wiederentdeckens, Nachkonstruierens, Modellbauens usf. zu unterstützen und auch reflektierbar und erlebbar zu machen.

6. Abschließende Bemerkungen

Mit den didaktischen Prinzipien werden gewisse Grundregeln für die Gestaltung und Durchführung von Mathematikunterricht formuliert. Was bedeuten sie nun für den Lehrer in seiner Unterrichtspraxis? Nun ich meine, es ist nützlich, die Prinzipien zunächst allgemein zu überdenken (wobei ich als Grundlage auf das Buch: Wittmann, Grundfragen des Mathematikunterrichts, verweise) und sie sich an auch selbst konstruierten Beispielen zu veranschaulichen, um ein Gefühl für die Tragweite und Wirksamkeit der Prinzipien zu entwickeln. Ferner ist mit dem Verständnis und dem Akzeptieren der Prinzipien noch wenig für ihre Umsetzung in den Unterricht getan. Fehlen vielleicht heute auch noch weitere gut ausgearbeitete Unterrichtssequenzen, in denen die Wirksamkeit der Prinzipien und ihre Umsetzung, Realisierung interpretativ demonstriert wird, so ist es keine Flucht des Didaktikers aus der Verantwortung, wenn abschließend festgestellt werden muß, daß die letzte Instanz für die Anwendung der Prinzipien und deren Ausmaß nur der Lehrer sein kann. Denn nur er kennt (oder kann

kennen) alle Determinanten seines Unterrichts und kann entscheiden, in welchem Ausmaß welches Prinzip realisiert werden soll. Das heißt aber umgekehrt nicht, daß sich der Lehrer willkürlich außerhalb der Prinzipien stellen kann, ohne großen Schaden und Nachteile für seinen Unterricht und seine Schüler in Kauf zu nehmen! Also: Prinzipien als Rahmenrichtlinien für den Unterricht, die der Lehrer in der konkreten Situation auszugestalten und mit Leben zu erfüllen hat.